数理解析研究所講究録
200巻 1974年 34-37

tight 4-design について

阪大大学院　加納幹雄

R.M Wilson と D.K.Ray-Chaudhuri によって Fisher の不等式の拡張である次の定理が証明された

定理　$\mathcal{D}$ を $2s-(v, k, \lambda)$ design とし

$v \geq k+s \Rightarrow b = $ block の コ数 $\geq \binom{v}{s}$

上式で等号の成り立つ design を tight $2s$-design という。以下 tight 4-design について。

現在知られている tight 4-design は自明な $v-2-(v, v-2, 1)$ design と M_{23} を自己同型群としてもつ 4-(23, 7, 1) design (及びこれの complementary) だけである。これより自明でない tight 4-design は 4-(23, 7, 1) に限るのではないかと思われる

まず tight 4-design に関しても上の両者による次の結果が基本的である

定理　$\mathcal{D}$ を $4-(v, k, \lambda)$ tight 4-design とすると異なる2つの block の intersection number は2つ

あってこれは

$$X^2 - \left\{ \frac{2(k-1)(k-2)}{(k-3)} + 1 \right\} X + \lambda\left(2 + \frac{4}{k-3}\right) = 0$$

の2根である.

Cor　　$k-3 \mid 4\lambda$　　（及び $\lambda=1 \longrightarrow 4-(23,7,1)$）

この定理により容易に、$\lambda=1$ なる tight 4−design は $4-(23,7,1)$ に限ること及び $2 \leqq \lambda \leqq 10$ では自明でない tight 4−design は存在しないことが確かめられる.

今 μ_2, μ_1 $(\mu_2 > \mu_1)$ を異なる2つの block の intersection number とすると次の結果が得られた.

tight 4−design において

1. $\mu_2-\mu_1=1$　なら　自明なもの
2. $\mu_2-\mu_1=2$　なら　$4-(23,7,1)$ design
3. $\mu_2-\mu_1=3$　なら　存在しない
4. $\dfrac{k-\mu_2}{\mu_2-\mu_1}$ は整数

4. は野田氏に教えてもらった、有力ではないかと思われる結果

次に 1〜4. の簡単な証明を述べる

1. $\mu_2-\mu_1=1$ のときは

$$\mu_2+\mu_1=\frac{2(k-1)(k-2)}{(v-3)}+1 \qquad \mu_2\cdot\mu_1=\frac{k(k-1)^2(k-2)}{(v-2)(v-3)}$$

$$\therefore\ \lambda=\frac{1}{2}\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{(v-2)(v-3)}$$ より

上の2式と合わせて

$$\{v-(k+1)\}\{v-(k+2)\}=0$$ が得られるのでO.K

2.3 $\mu_2-\mu_1=a$ とおく 又 $k<\frac{v}{2}$ としてよいので

$$\frac{k(k-1)}{(v-2)}-\frac{(k-1)(k-2)}{(v-3)}<\frac{3}{4}$$

これと上の3つの式より

$$T=\frac{(k-1)(k-2)}{v-3}<a^2-1$$

又 $\lambda<\frac{T^2}{2}$ これから後はCor を用いればよいが

逆向きの不等式も用いないと計算が大変である。

4. N を $v\times b$ 行列 A_1, A_2 を $b\times b$ 行列として

次のように定ぎする。ただし点は $a_1,\dots,a_v$, block は $B_1,\dots,B_b$

で表わす

$$(N)_{ij}=\begin{cases}1 & a_i\in B_j\\ 0 & その他\end{cases}$$

$$(A_i)_{k,l}=\begin{cases}1 & |B_k\cap B_l|=\mu_i\\ 0 & その他\end{cases}$$

とおくと

$$^tN\cdot N=kI+\mu_1A_1+\mu_2A_2$$

$$J=I+A_1+A_2$$

$$A_1 A_2 = A_2 A_1 \qquad \text{これはウミ面倒}$$

これより A_1, A_2 の固有値を計算し、これが代数的整数であることに注意すればよい。

tight 4-design の決定には程遠いですが、これは興味ある問題だと思います。

参 R.M Wilson and D.K. Ray-Chaudhuri

On t-designs (Generalization of Fisher's inequality to t-design)

Amer Math Soc Notices 18 (1971) 805